

HIPERCONGESTIÓN

Luis Bruno Moreno Ruiz*

59

Resumen

Este trabajo estudia la discusión sobre los avances que se han tenido en la modelización de la hipercongestión. Las relaciones existentes con la velocidad y el flujo de tráfico y su efecto sobre la oferta y demanda de un camino, así como su relación con el tiempo de los individuos y el peaje óptimo que se debe imponer para alcanzar la eficiencia. Es un problema complejo en que la mejor manera de ser modelado es con modelos endógenos y de equilibrios dinámicos, sin embargo cada caso debe ser tratado de manera particular.

Palabras clave: hipercongestión, cuello de botella, modelos dinámicos.

Clasificación JEL: R41, D62

Introducción

Las velocidades bajas y los flujos son características de la hipercongestión y comunes en las áreas urbanas, por lo que suele realizarse el análisis de la formación de una cola de espera en cada intersección ya que en estos puntos es en donde se empieza con la saturación, pero ésta no es la única forma de abordar el problema.

Small y Chu (2003) consideran que la hipercongestión es un fenómeno que crea ineficiencias y que imponen considerables gastos a los individuos, gasto que se ve reflejado principalmente en el tiempo.

El trabajo está organizado de la siguiente manera: en el primer apartado se pretende responder al cuestionamiento de ¿qué es la hipercongestión?, después se da respuesta a: ¿cómo

* Lic. en economía por la UAM-Azcapotzalco. Egresado de la maestría en Economía Regional por la UAC.

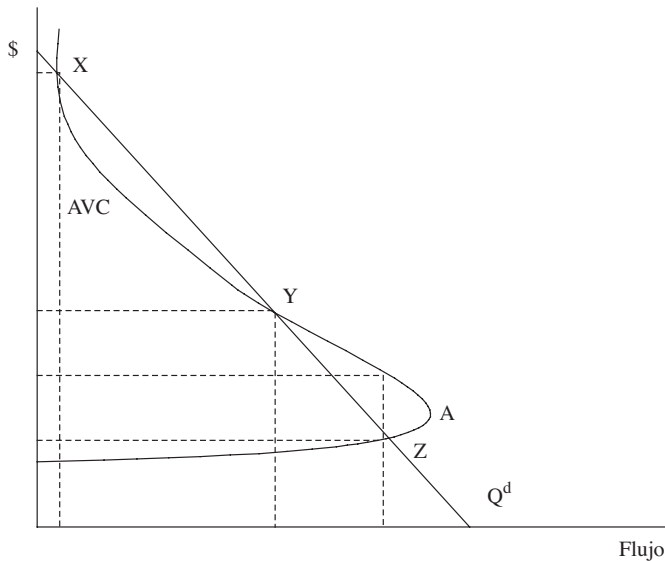
se llega a ella? para presentar el objetivo de modelar la hipercongestión y la modelización dinámica, y finalmente se realizan las conclusiones.

1. ¿Qué es la hipercongestión?

La hipercongestión se presenta a partir de un punto en que la oferta es incapaz de abastecer a la demanda. La oferta de infraestructura vial es limitada¹ y está determinada por las características del camino y la frecuencia de usuarios que esté presente, de modo que a medida que se van incrementando los usuarios la oferta se va reduciendo. En este tipo de modelos los usuarios están determinando tanto la demanda como la oferta.

En un tratamiento de análisis convencional (Hau, 1998) se parte de un conductor representativo bajo condiciones de poco tráfico en un tramo de camino urbano con un punto de origen y uno de destino. *Ceteris paribus* al entrar un vehiculo adicional en el camino se incrementa la densidad, disminuye la velocidad y se alarga el tiempo del viaje, tal como lo señala Hau, es una relación de baja densidad y alta velocidad. Paralelamente el flujo de tráfico es producto de la densidad, en vehículos por kilómetro y velocidad.² El flujo de tráfico es determinado

Gráfica 1
Costo medio y demanda



¹ La oferta de infraestructura vial es limitada, al menos en el corto plazo. Otro punto de vista es que la demanda sea lo suficientemente alta.

² Véase Apéndice Gráfica 1. Se presenta la relación de velocidad en kilómetros por hora y la densidad de vehículos por kilómetro. A medida que se incrementa la densidad disminuye la velocidad. En carreteras la velocidad alcanza mayores niveles.

de manera endógena por la densidad del tráfico y la velocidad, y alcanza su máximo (F^{\max}) a cierta velocidad (S^m).³ Estas relaciones de densidad-velocidad, velocidad-flujo y densidad-flujo se pueden observar en la Gráfica A.4 en el Apéndice.

La relación flujo-velocidad se puede convertir en una relación de flujo de tiempo del viaje.⁴

El tiempo del viaje lo podemos calcular en unidades monetarias usando el precio sombra, debemos tener presente que los usuarios conceden distintas valoraciones a su tiempo.⁵ El tiempo es un costo para los usuarios, llamado costo variable medio (AVC, por sus siglas en inglés).

La parte de la curva de AVC con pendiente positiva inicia con poco flujo y un costo bajo, a medida que se incrementa el flujo los costos también lo van haciendo, estamos en una situación de congestión hasta el punto “A” en el que la pendiente cambia y el problema es de hipercongestión,⁶ donde la velocidad se va acercando a cero y los costos tienden a infinito. A la parte de la curva con pendiente negativa se le llama hipercongestión, y la parte con pendiente positiva “congestión ordinaria” (Small y Chu, 2003).

A cada nivel de flujo le corresponden dos costos distintos, el de congestión y el de hipercongestión. Al introducir una curva de demanda (Q^d) el equilibrio se alcanza en “Z” porque se igualan las curvas de demanda y de costo medio, que es en la que los individuos basan sus decisiones de recorrido (Hau, 1998). En este punto las curvas de oferta y demanda tienen pendiente positiva. En los puntos “X” y “Y” también podrían ser un equilibrio pero en ellos no se estaría minimizando el costo del viaje.

Small y Chu (2003) citan a Newbery para señalar que los puntos “X” y “Y” no son equilibrios estables y lo ejemplifican con un incremento en el tiempo ocasionado por un conductor inexperto que provoca una disminución en los flujos,⁷ es por ello que la mejor forma de modelizar la hipercongestión es con modelos dinámicos.⁸ Sin embargo, es importante notar

³ Véase Gráfica 2 del Apéndice, F^{\max} es la máxima capacidad de ingeniería (Haight, 1963).

⁴ Véase Gráfica 3 del Apéndice, la máxima capacidad de ingeniería (F^{\max}) es la misma que en la Gráfica 2.

⁵ Para simplificar el análisis se considera al usuario promedio que esta obteniendo un producto homogéneo que es un viaje que comprende un origen a un destino.

⁶ Es la parte inferior de las gráficas 2 y 4-IV del Apéndice.

⁷ Véase Gráfica 5 del Apéndice, al ΔT ocasiona un Δ en f.

⁸ Para profundizar el análisis sobre modelos estáticos véase a Verhoef (1999). En este mismo texto se señala que para que la consistencia dinámica de un equilibrio estático se debe tomar como requisito, para congestión continua, que sólo puede ser significativo si los valores corresponden a valores inmóviles del estado de funcionamiento. También se establecen dos condiciones: a) *condición inmóvil del estado* (*Stationary State Condition*) como una fotografía en un sistema cambiante; y b) *condición de viabilidad* (*Feasibility Condition*), se requiere que el sistema sea dinámicamente estable. Sin embargo, Small y Chu (2003) muestran que al menos “X” y “Y” no son equilibrios estables.

que para ciudades extremadamente congestionadas los puntos “X” y “Y” pueden durar gran parte del día,⁹ por lo que los modelos de equilibrio estático pueden ser de utilidad.

Se ha producido una acalorada discusión sobre si los equilibrios en hipercongestión son estables o no, el resultado parece indicar que es un fenómeno transitorio y que la mejor forma de estudiarlos es con modelos dinámicos (Lindsay y Verhoef, 2000). Este tipo de modelos permiten variaciones en los flujos por lapsos.

Arnott (1990) señala que “la hipercongestión ocurre como una respuesta transitoria de un sistema no lineal a un punto de demanda”. Small y Chu (2003) hacen referencia a un argumento básico: “La hipercongestión ocurre cuando un límite de capacidad es excedido en algún sitio en el sistema”. Agregando colas de espera que se van agravando con flujos de entrada.

2. ¿Cómo es que se llega a ella?

62

En el apartado anterior ya se dijo que la hipercongestión es la parte con pendiente negativa de la AVC, también se ha expuesto que cuando se excede la capacidad de un sistema ésta se produce. Pero ¿cómo es que se llega a esta situación? y ¿cuánto tiempo dura?

Evidentemente esto no es una situación que dure para siempre, si así fuera estaríamos atascados en la hipercongestión, no obstante perdura hasta el punto en que las colas (o la cola) que provocan la saturación se empiezan a descongestionar. Así disminuye la cantidad demandada hasta la congestión ordinaria.

Algunos de los factores que determinan la existencia de colas pueden ser semáforos, curvas, glorietas, entradas a vías principales, líneas para dar vuelta, intersecciones, entre otros. McDonald, D’Ouille y Liu (1999) argumentan que los embotellamientos son resultado de la heterogeneidad del camino,¹⁰ es decir de las particularidades del camino. La hipercongestión ocurre rutinariamente en caminos no-uniformes (Lindsay y Verhoef, 2000), haciendo que el tiempo total viaje esté en función de los vehículos situados ante él para salir del embotellamiento.

Lo anterior liga dos cuestiones fundamentales por lo que es necesario hacer una modelización dinámica: i) la hipercongestión depende de las características del camino; y ii) de las decisiones que *minuto a minuto* toman los usuarios.

⁹ Ciudades como Bangkok, Bombay, Budapest, Buenos Aires, Yakarta, México, Santiago, Sao Paulo, Seúl, Shangai y Taipei (Hau, 1998).

¹⁰ La forma de un segmento del camino depende de un sinnúmero de factores: número y anchura de los carriles del tráfico, del grado y curvatura del camino, límite de velocidad, localización en relación a rampas de entrada y salida, tiempo, mezcla de tipos de los vehículos, proporción de los conductores que son familiares con el camino, y de idiosincrasias de la población que conduce localmente (Lindsay y Verhoef, 2000).

3. Objetivo de modelizar la hipercongestión y la modelización dinámica

Al ser el camino físicamente limitado y utilizado por distintos motivos de demanda en distintos horarios, se hace necesario contar con una modelización dinámica que permita considerar varias características. Los modelos presentan distintas variantes, pero se enfrentan a un problema de colas de espera causado por un embotellamiento derivado de las características físicas del camino.

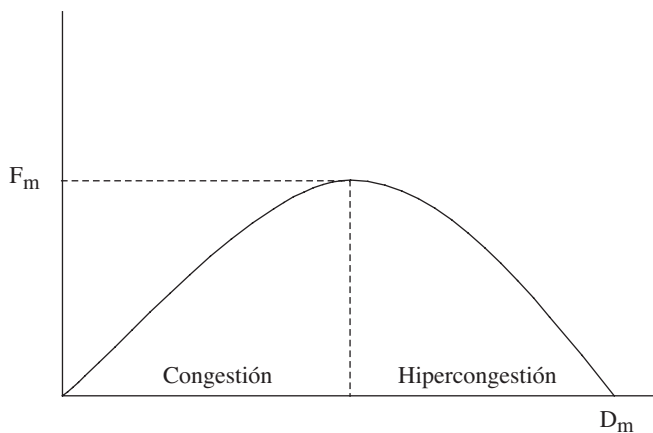
3.1 Antecedentes de la modelación dinámica

Small (1992) señala que la congestión se origina cuando muchos vehículos intentan usar el camino de manera simultánea. Ocasionando una alta densidad (D) que provoca una reducción en la velocidad (S) para así determinar el flujo (F):¹¹

$$F = DS^{12}$$

La figura de flujo-densidad se puede partir en dos, a la izquierda observamos congestión mientras que a la derecha hipercongestión, esto refleja un problema de medición: la velocidad, el flujo y la densidad se miden sobre un cruce finito de espacio y tiempo. Estas condiciones de desequilibrio corresponden a una transición de congestión a hipercongestión (Small, 1992).

Gráfica 2
Flujo-Densidad



¹¹ Small utiliza volumen (V) en lugar de flujo (F).

¹² La relación entre F y D se conoce como *diagrama fundamental de flujo*.

Desde los años sesenta se han venido realizando diversos estudios sobre las relaciones flujo densidad y velocidad. En este periodo Walters (1961) usó la curva de flujo densidad para análisis económico dado que se podía generar una curva de costo viaje:

$$C(q) = C_0 + \alpha L/s(q)$$

Donde: α es el costo unitario del tiempo recorrido; L es la distancia; s es la velocidad en términos del flujo; y C_0 son los costos del viaje (Lindsay y Verhoef, 2000).

En el Cuadro 1 se presentan algunos de estos estudios y los resultados obtenidos:

Cuadro 1
Estudios sobre las relaciones flujo, densidad y velocidad

<i>Autor/Lugar</i>	<i>Estimaciones/Resultados</i>
Walters (1961) Merrit Parkway y en Lincoln Túnel	$S = -S_m \log (D/D_m)$
Payne (1984) Santa Mónica a los Ángeles	$S = \begin{cases} 58.1 - .351 D & \text{si } D < 50 \\ -28 + 100 / (.912 + .0141 D) & \text{si } D > 60 \end{cases}$
Boardman y Lave (1977)	$F = 2490 - 0.523 (S - 35.34)^2$
Inman (1978)	$F^{(2.95)} = 3.351 \times 10^9 - 231.4 [S - 7.2]^{(4.06)}$
Keeler y Small (1977)	$F/F_K = 0.8603 - 0 - 001923 (S - 45.68)^2$
Coleman (1961) Dos arterias en Pennsylvania	$\frac{F}{F_K} = 0.89 - 288 \left[\frac{1}{S} - \frac{1}{13.0} \right]^2$
Smeer (1968) Londres	$\frac{F}{w} = 68 - 0.13 S^2$
Ardekani y Herman (1987) Austin, Texas	$S = 18.38 [1 - (0.01D/w)^{1.239}]^{2.58}$

Fuente: Elaboración propia a partir de Small (1992).

Payne utiliza mínimos cuadrados discontinuos, mientras que Boardman y Lave obtuvieron dos resultados para esta ecuación cuadrática: el de hipercongestión y el de congestión. Inman utilizó una transformación Box-Cox. En la Gráfica A.6 en el Apéndice se pueden observar las estimaciones de estos dos últimos estudios, los cuales no logran capturar la tendencia, de hecho, son estudios que corresponden con grados de congestión muy diversos. Keeler y Small hacen una relación entre el flujo y la su capacidad en distintos puntos del camino, mostrando una

proporción de hipercongestión.¹³ Smeer utilizó el ancho del camino (w , en pies), obteniendo la no existencia de hipercongestión. Ardekani y Herman utilizaron la fotografía aérea.

A pesar de que los estudios han sido muchos y variados, los resultados no han sido del todo satisfactorios dando origen a la modelación dinámica. Small y Chu (2003) sostienen que la hipercongestión ocurre como consecuencia de oleadas de demanda transitorias y que pueden ser analizadas sólo dentro de un modelo dinámico.¹⁴

3.2 Modelación dinámica

Dentro de los modelos de tiempo dependiente (LWT), los cuales reciben su nombre de los modelos desarrollados por Lighthill y Whitham y Richards (que es el modelo hidrodinámico), ubicamos a un vehículo en una localización x y en un tiempo t tenemos una ecuación diferencial parcial que se conoce como la *ecuación de conservación*:¹⁵

$$\frac{\partial F(t, x)}{\partial x} + \frac{\partial D(t, x)}{\partial t} = 0$$

Al tener un punto en el camino que genere congestión, río abajo se genera una cola que causa tiempo y disminución de la velocidad, pero una vez que este punto es superado los vehículos pueden acelerar.¹⁶

El modelo es útil para analizar los cambios en tiempo discreto, sostiene una relación entre velocidad y densidad en cada punto de tiempo y espacio, sin considerar las condiciones que pueden encontrar o anticipar los conductores. También asume que los conductores pueden ajustar la velocidad instantáneamente. Sin embargo, no explica la velocidad de los conductores y las condiciones de inestabilidad de la circulación (Lindsay y Verhoef, 2000).

De este modelo se deriva el modelo de embotellamiento como una simplificación en el que se van desarrollando colas. Tal como lo muestra Small “la curva de flujo-velocidad con un flujo máximo no puede decirnos qué pasa cuando la demanda excede el flujo” (Small, 1992: 69), lo cual da origen a los modelos de *embotellamiento* causados por el cuello de botella que se encuentra río abajo y que va generando una cola.

¹³ El tráfico adicional que se agrega de manera no-uniforme afecta los patrones de demanda volviendo más lenta la razón volumen-capacidad. Lo cual pasa en la mayoría de las calles y arterias (Small, 1992).

¹⁴ Los modelos estáticos consideran constantes la densidad, los flujos y la velocidad a lo largo del camino y del tiempo como si no cambiaran durante el viaje, tampoco considera la diferencia entre los conductores.

¹⁵ Que sólo se puede obtener si existen los requisitos de derivación en los casos donde F y D son continuas.

¹⁶ Es así que la cola de espera sólo puede durar unos minutos y se puede definir como el índice de flujo de descarga inferior duradero (Small y Chu, 2003).

Si un conductor quiere entrar en el camino ocasiona una externalidad que se ve reflejada principalmente en el tiempo del resto de conductores,¹⁷ la cual será necesario modelar. Se ha avanzado desde la estimación hecha por Dewees en 1983, que es útil para el cálculo de los costos marginales pero requiere mucha información.¹⁸ En el mismo año Small derivó una función expresada en la media de tiempo de viaje sobre un periodo punta y realizó una estimación con mínimos cuadrados no lineales con lo que se llegó a capturar algún mínimo de interacción dinámica:

$$1/S = \begin{cases} T_0 & \text{Si } F \leq F_K \\ T_0 + T_1(F/F_K - 1) & \text{Si } F > F_K \end{cases}$$

Pero ya que el camino está determinado por la cantidad de vehículos que se encuentran en él y los *cuellos de botella* con los que cuenta, Small (1992) presenta un modelo en donde considera el flujo de tráfico que llega en el momento t ($F_a(t)$) a un *embotellamiento* de capacidad F_k , y que permite un flujo de paso por el mismo de $F_b(t)$ con $N(t)$ vehículos que esperan en la cola:

$$F_b(t) = \begin{cases} F_a(t) & \text{si } F_a(t) \leq F_K \text{ y } N(t) = 0 \\ F_K & \text{De otra manera} \end{cases}$$

Con lo que la longitud de la cola dependerá del flujo de vehículos que entren o que salgan:

$$N(t) = F_a(t) - F_b(t)^{19}$$

Como se va cubriendo poco a poco la capacidad del camino (F_k) por la llegada de $F_a(t)$ en el momento t_q , que es cuando se excede la capacidad, $N(t)=0$ para $t \leq t_q$:

$$N(t_q) \equiv \int_{t_q}^{t_q'} [F_a(t) - F_K] dt = 0$$

Cada vehículo que llegue a la cola esperará por $N(t)$ vehículos que pasen por el embotellamiento causando un retraso de:

$$T_D(t) = \frac{N(t)}{V_K} = \int_{t_q}^t \left[\frac{F_a(t')}{F_K} - 1 \right] dt', t_q \leq t \leq t_q'$$

¹⁷ Las externalidades que produce un conductor son muy variadas, pero en este trabajo sólo nos interesan aquellas relacionadas con los costos de congestión. Lindsay y Verhoef (2000) señalan que en la congestión el costo del recorrido es incrementado por la presencia de otros vehículos debido a que se baja la velocidad o porque se requiere de mayor atención al conducir.

¹⁸ $1/S = T_0 + T_1 (F/F_K)^k$, T_0 , T_1 y k son parámetros.

¹⁹ Si es discontinua es no diferenciable en t .

Donde: T_D es el tiempo de viaje de retraso.

Small (1992) hace una consideración para un periodo que va de $[t_p, t_p']$ con una entrada de tráfico constante de F_a durante el intervalo y cero salida, en el que señala que si se forma una cola se inicia cuando $t_q = t_p$ la cual produce una cola de retraso para $t_p \leq t \leq t_p'$. (véase Gráfica 3):

$$T_D(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } F_a \leq F_K \\ (F_a/F_K - 1)(t - t_p) & \text{si } F_a > F_K \end{cases}$$

Teniendo un retraso medio de viaje de:

$$\bar{T}_D = \frac{1}{t_{p'} - t_p} \int_{t_p}^{t_{p'}} T_D(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{si } F_a \leq F_K \\ \frac{1}{2}(t_{p'} - t_p)(F_a/F_K - 1) & \text{si } F_a > F_K \end{cases}$$

Otra variante del LWR es la que incorpora caminos uniformes y que los vehículos viajan a una velocidad constante, es un modelo en el que los individuos no causan influencia sobre otros y es conocido como modelo de nula propagación. Una tercer variante es la de el modelo instantáneo de propagación, en el cual los vehículos se afectan por los que entran detrás de ellos.

El modelo de Mun (Small y Chu, 2003) de colas de espera común se puede considerar como un modelo de propagación nula, tal como lo hacen Lindsay y Verhoef (2000). Este modelo supone que la capacidad de embotellamiento es independiente a las condiciones de flujo, y calcula el tiempo de viajes para un vehículo que entra en el momento t :

$$T(t) = \frac{L - J(t)}{v_1[\lambda(t)]} + \frac{J(t)}{v_2(F_k)}$$

Donde: L es un segmento de la carretera con capacidad de embotellamiento; F_k , $v_1(\cdot)$ y $v_2(\cdot)$ son las ramas congestionadas e hipercongestionadas respectivamente; y $J(t)$ es la longitud de la cola.

El retraso en los viajes origina un costo, que es el costo de retraso en el horario por lo que la congestión, o el tráfico, acelerará el momento de la salida de casa, es decir del origen.²⁰ Arnott, Palma y Lindsay (1998) hacen endógeno el tiempo de salida: el estar en una cola ocasiona un retraso en el viaje, por lo que el tiempo de viaje del origen (O) al destino (D) es:

²⁰ Es interesante preguntarnos si ¿éste costo es variable?, es decir ¿el individuo cuando toma su decisión de salir lo está eligiendo? Esto surge porque él puede saber en que momento se enfrentará a un fenómeno de congestión, sin embargo no es una elección de un único conductor sino de un conjunto de ellos.

$$T(t) = \bar{T} + T^w(t)$$

Donde: T es un componente fijo del tiempo de viaje; $T^w(t)$ es el tiempo de espera en la cola (del embotellamiento); t es el tiempo de salida de casa; y $Q(t)$ es la longitud de la cola (número de carros en la cola) en el tiempo t .

Por lo que $T^w(t) = \frac{Q(t)}{F_k}$, y con $T=0$:

$$T(t) = \frac{Q(t)}{F_k}$$

Mun demuestra que el tiempo promedio de los viajes es una función que no disminuye la corriente y los flujos pasados, y lo interpreta como una indicación de una curva de suministro creciente (Small y Chu 2003) y $r(t)$ es la tasa de salida, así la longitud de la cola es:

68

$$\frac{dQ(t)}{dt} = \begin{cases} 0 & \text{Para } Q(t) = 0 \text{ y } r(t) \leq F_k \\ r(t) - F_k & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Como es lógico, si la capacidad de embotellamiento no es excedida por la tasa de salidas entonces la longitud de la cola es igual a cero (no existe cola); pero al excederse la capacidad se empieza a formar la cola, por lo que el horario de salida de casa (origen) determinará la llegada, temprano o tarde, al trabajo (origen).

$$C(t) = \alpha(\text{tiempo de viaje}) + \beta(\text{tiempo pronto}) + \gamma(\text{tiempo tarde})$$

Donde: α es el costo sombra gastado en el tiempo de viaje; β es el costo sombra del tiempo temprano; y γ es el costo sombra del tiempo tarde.

Arnott, Palma y Lindsay (1998) asumen que es realista que $\gamma > \alpha > \beta$ si todos los individuos tienen el mismo tiempo de inicio (t^*). Para los individuos que lleguen temprano el tiempo será $t^* - t - T(t)$ y para los que llegan tarde $t + T(t) - t^*$, permitiendo que t_n sea el momento de salida para el individuo que llega en el momento, esto es $t_n + T(t_n) = t^*$:

$$C(t) = \begin{cases} \alpha T(t) + \beta (t^* - t - T(t)) & \text{para } t < t_n \text{ (llegar temprano)} \\ \alpha T(t) + \gamma (t + T(t) - t^*) & \text{para } t > t_n \text{ (llegar tarde)} \end{cases}$$

Por lo que el precio del viaje $p(t)$ será igual al costo $C(t)$ y al peaje $\tau(t)$ todo para el momento t :

$$p(t) = C(t) + \tau(t)$$

Si consideramos un periodo de inicio y de término denotado por t_0 y t_e para la capacidad del embotellamiento tenemos que la diferencia entre t_e y t_0 es igual al número de viajes sobre la capacidad del camino. Así la primera persona en salir temprano y la última que sale tarde no se enfrentan a colas, por lo que su precio será igual al costo obteniendo:

$$p = C = \frac{\beta\gamma}{\beta + \gamma} \frac{N}{F_k}$$

Donde t_0 , t_e y p son independientes del valor de la unidad de tiempo α .

Esta independencia hace que las colas de espera en algún momento sean inversamente proporcionales a α (Arnott, Palma y Lindsay, 1998). Lo cual se puede ver de manera más clara al resolver el sistema.

$$T(t) = \begin{cases} \frac{\beta}{\alpha - \beta} (t - t_0) & \text{para } t \in [t_0, t_n] \\ \frac{\gamma}{\alpha + \gamma} (t_e - t) & \text{para } t \in [t_n, t_e] \end{cases} \quad 21 \quad r(t) = \begin{cases} r_E = \frac{\alpha}{\alpha - \beta} F_k & \text{para } t \in (t_0, t_n) \\ r_L = \frac{\alpha}{\alpha + \gamma} F_k & \text{para } t \in (t_n, t_e) \end{cases}$$

Donde: $r(t)$ es la tasa de salida.

El costo de salir tarde es mayor que el de salir temprano y la llegada temprano de la tasa de salidas es constante sobre la capacidad, por lo que la longitud de la cola y el tiempo de viaje se incrementan linealmente. Para las llegadas tarde la tasa de salidas es menor a la capacidad y la cola disipa la linealidad (Arnott, Palma y Lindsay, 1998), lo cual se puede observar en la Gráfica 3.

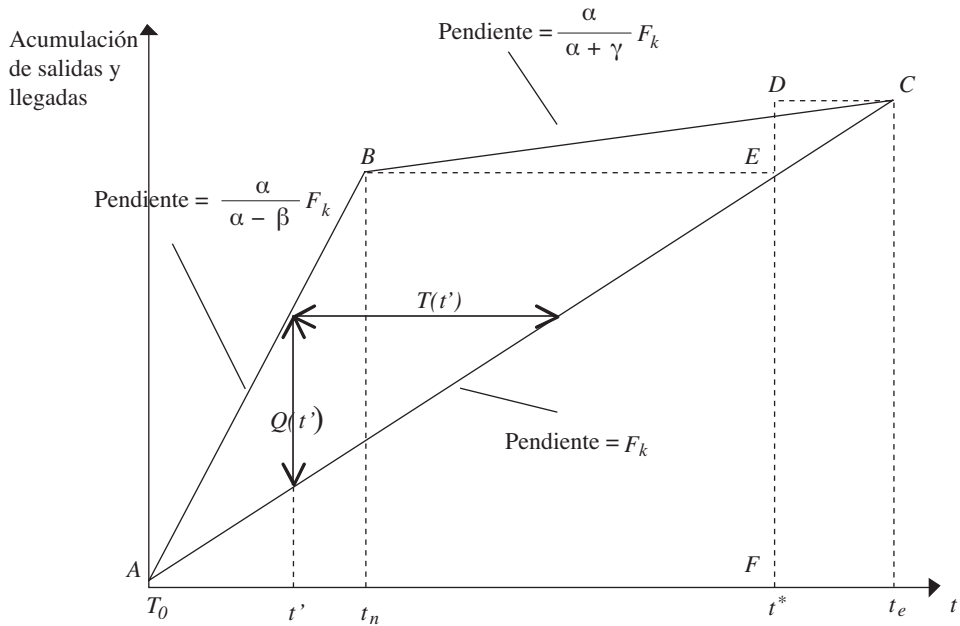
La acumulación de salidas es igual a ABC, que es la pendiente de las curvas es la tasa de salida; el tiempo total de viaje es la suma del viaje de todos los individuos que se obtiene de sumar el incremento a cada cola $\int_{t_0}^{t_e} Q(t)$, que es el área de ABCA; y el costo total del tiempo de viaje es TTC. Los conductores que llegan temprano son $\int_{t_0}^{t_e} F_k (t^* - t) dt$, que es AEFA, lo cual es similar a las llegadas tarde EDCE por lo que el costo total de horarios retrasados es $\beta(\text{AEFA}) + \gamma(\text{EDCE})$. Así, el costo del viaje igual a:

$$TC = \delta \left(\frac{N^2}{F_k} \right)$$

²¹ “El equilibrio requiere que este costo sea el mismo en cualquier momento en el intervalo durante el cual ocurren los viajes, que denotamos por $[t_i; t_u]$ ” (Small y Chu, 2003), lo cual implica:

$$\frac{dT(t)}{dt} = \begin{cases} \beta / \alpha & \text{para } t_i < t < t^* \\ -\gamma / \alpha & \text{para } t^* < t < t_u \end{cases}$$

Gráfica 3



70

Donde $\delta \equiv \frac{\beta\gamma}{(\beta + \gamma)}$; y el costo marginal de viaje es $MSC = \frac{\partial TC}{\partial N} = 2\delta \left(\frac{N}{s} \right)$.

Ahora podemos calcular la externalidad de la congestión, al hacer la diferencia entre el costo marginal y el costo del viaje:²²

$$CE = MSC - C = \delta \left(\frac{N}{F_k} \right)$$

Por lo que el costo total de salida es igual al óptimo social:

$$TTC = SDC = \frac{\delta}{2} \left(\frac{N^2}{F_k} \right)$$

Este tipo de diagramas es útil para describir el impacto de un “embotellamiento móvil” debido a que puede ocuparse de situaciones en las cuales la capacidad de los cambios de

²² Otros conductores agregan al tiempo de salidas en tal camino por el patrón de salidas incluyendo la adición de conductores, que es independiente de donde salgan.

embotellamiento depende de la longitud de la cola (Lindsay y Verhoef, 2000). A manera de conclusión del desarrollo de este modelo, Arnott, Palma y Lindsay (1998) señalan:

Existe un único equilibrio sin peaje y un único óptimo social.

La longitud cerca de la hora es igual al ratio del número de la capacidad de conductores, por lo tanto es endógeno.

SDC , que en el análisis estándar es ignorado, es el costo de tiempo de viaje total.

El modelo es estructurado en el sentido proporcionando un tratamiento a la congestión tecnológica y el comportamiento de los usuarios, sus decisiones en el tiempo de salida. En contraste al modelo de tráfico tradicional que falla al tratar de explicar las decisiones del tiempo de salidas individuales o la congestión física.

Aunque la idea del modelo es el equilibrio dinámico tiene una representación tiempo-independiente forma reducida (se asume demanda inelástica) mientras que los costos de viaje y los costos marginales sociales asumen sus respectivas fórmulas.

El modelo trata la congestión como una dependencia histórica. La historia es capturada por el estado de la variable, longitud de la cola.

La capacidad puede ser determinada. El beneficio marginal o la capacidad de expansión es igual $-\frac{\partial TC}{\partial F_k}$.

El costo del tiempo de viaje es pura pérdida del peso muerto, que se puede corregir con un peaje.

En otro modelo que consideran redes densas de la calle para calcular el tiempo medio de retraso necesitamos conocer la duración $W=(t_2-t_1)$ en la intersección que tenga una capacidad de F_k y con una demanda de cero fuera de este intervalo, haciendo que se inicie en cero y suba hasta un máximo $(\lambda - F_k)W$:

$$T_D = \left(\frac{W}{2}\right) \left(\frac{\lambda}{F_k} - 1\right)$$

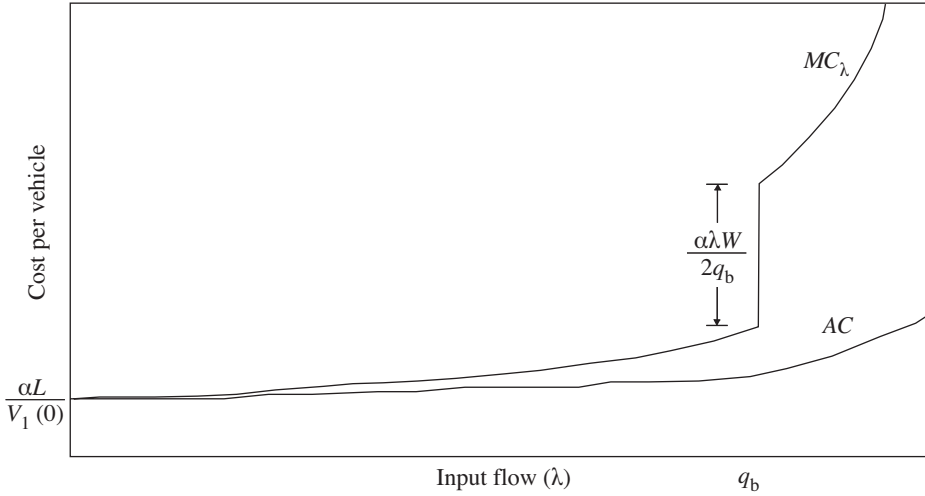
En un punto de demanda exógeno podemos obtener el costo promedio de los viajes que estará dado por el tiempo de los viajes y el tiempo medio del retraso, y asumimos que λ está a menos de la capacidad del camino río arriba. Recordando que α es el valor del tiempo en el viaje:

$$AC(\lambda) = \begin{cases} \alpha \frac{L}{v_l(\lambda)} & \text{si } \lambda \leq F_k \\ \alpha \frac{L}{v_l(\lambda)} + \alpha \left(\frac{W}{2}\right) \left(\frac{\lambda}{F_k} - 1\right) & \text{si } \lambda > F_k \end{cases}$$

Para obtener el costo total utilizamos la duración W por el costo promedio. El costo marginal se incrementa conforme se van añadiendo vehículos (véase Gráfica 4), y es discontinuo cuando $\lambda = Fk$. En la región de hipercongestión el costo medio se incrementa de una manera moderada, pero el costo marginal tiene un gran salto de $\frac{\alpha \lambda W}{2 F_k}$, el cual es el peaje óptimo.

Otro enfoque es la modelación de una red densa de la calle, consideramos que existe un distrito central de negocios (CBD, *Central Business District*). Los viajes dentro del CBD

Figura 4
Costos y flujo de entrada: camino uniforme con cuello de botella (bottleneck),
demanda exógena



72

Fuente: Small y Chu (2003).

inician y terminan en sus fronteras. Contiene M millas de calle y la longitud media de viaje es η , del mismo modo los vehículos pagan una tarifa λ por entrar al CBD. El tráfico está en función de la densidad y la velocidad. Small y Chu (2003) asumen:

$$\text{Índice de flujo: } F(t) = D(t)s(t)$$

$$\text{Relación velocidad-densidad: } s(t) = S[D(t)]$$

$$\text{Conservación de vehículos: } M \frac{dD(t)}{dt} = \lambda(t) - \left(\frac{M}{\eta} \right) F(t)$$

En una densidad normalizada de $D=D_j$ (Small y Chu, 2003) tenemos que:

$$s(t) = s_f [1 - D(t)]^{1+\rho}$$

Donde: s_f es la velocidad del flujo libre y ρ es un parámetro.

El flujo y densidad máximos se alcanzan en:

$$F_m = s_f D_f \frac{(1+\rho)^{1+\rho}}{(2+\rho)^{2+\rho}} \quad D_m = \frac{D_j}{2+\rho}$$

El caso en que el punto de la demanda es exógeno se da cuando una persona entra al CBD y paga λ .²³ Si consideramos a $\rho=0$ y sustituimos los valores, obtenemos la ecuación diferencial normalizada en densidad: $T_f \frac{dD}{dt} = \frac{\lambda}{4\mu_m} - D(1-D)$.

Por otra parte, el caso de demanda endógena (modelo de embotellamiento) es compatible con las dos primeras asunciones pero no con la tercera,²⁴ y supone que los individuos son idénticos. Small y Chu sustituyen la *conservación de vehículos* por otras dos e incorporan una *condición divisoria en densidad*, lo cual implica que hay viajeros que alcanzan su destino; otra que supone que la hora punta debe ser razonablemente más larga que el tiempo de viaje de flujo libre; y una *aproximación para el tiempo del viaje*, $T(t) = \frac{L}{s(t)}$. Con esto el sistema alcanza una solución al seguir un auto y calcular el tiempo de viaje $T^*(t)$:

$$\int_{t-T^*(t)}^t s(t') dt' = L$$

En este modelo con hipercongestión se generan más tardanzas en viajes que en el modelo de embotellamiento, la hora punta también es más larga. No existe ninguna garantía de que el problema se pueda solucionar con un peaje, sin embargo para eliminar la hipercongestión se puede esperar un mayor flujo de salida.

Verhoef (2003) señala cuatro diferencias entre el modelo de congestión puro y el modelo de no propagación: 1) en el equilibrio de libre mercado la proporción del total de costos de salida de viaje del costo total de horarios tarde es diferente de la unidad; 2) el peaje óptimo ahorra una pequeña fracción del costo total variable; 3) periodo largo de llegadas con peaje comparado con no peaje; y 4) el costo privado incluyendo peaje es alto en comparación con el equilibrio de no peaje.

En el modelo el coche seguidor se describe como un coche $n+1$ el cual sigue a otro n (líder) en el tráfico. La relación que proponen Lindsay y Verhoef (2000) es:

$$\ddot{x}_{n+1}(t+\Delta t) = \frac{c [x_{n+1}(t+\Delta t)]^m}{[x_n(t) - x_{n+1}(t)]^1} [\dot{x}_n(t) - \dot{x}_{n+1}(t)]$$

²³ Que es uniforme durante el periodo máximo $[t_1, t_2]$.

²⁴ Con *Índice de flujo* $F(t) = D(t)s(t)$ y con *Relación velocidad-densidad*: $s(t) = S[D(t)]$ pero no con *conservación de vehículos* $M \frac{dD(t)}{dt} = \lambda(t) - \left(\frac{M}{\eta}\right) F(t)$; por que si no sería incompatible con el modelo de embotellamiento (Small y Chu, 2003).

Donde: los dos puntos denotan la segunda derivada y un punto una derivada de la localización x ; y c , l y m son parámetros no negativos.

La ecuación es la respuesta del seguidor ante la aceleración, siendo el lado derecho un estímulo de aumento de la velocidad disminuyendo la distancia con respecto al líder. Estos modelos son más realistas al considerar que los autos aceleran, o desaceleran, con tarifas finitas.

Un último modelo es el presentado por Verhoef (2003) el cual se desprende de la teoría del coche que sigue. Suponemos usuarios idénticos que viajan de un origen a un destino, donde la demanda es inelástica para N individuos que sólo deciden el momento de salida. Se incurre en un costo de tiempo de viaje c'' gastado en el camino, un costo por el tiempo de retraso²⁵ c^{sd} y un costo de peaje τ . Así, se tiene que el precio es igual a:

74

$$p(t_A) = c(t_A) + \tau(t_A) = c''(t_A) + c^{sd}(t_A) + \tau(t_A)$$

$$= \begin{cases} \alpha \cdot tt(t_A) - \beta \cdot t_A + \tau(t_A) & \text{para } t_A \leq t^* = 0 \\ \alpha \cdot tt(t_A) + \gamma \cdot t_A + \tau(t_A) & \text{para } t_A > t^* = 0 \end{cases}$$

Este es un planteamiento muy similar al presentado por Arnott, Palma y Lindsey (1998), pero en este modelo se realiza una transformación de la relación densidad-velocidad y de la relación distancia-velocidad donde δ concierne a la distancia de conductores del carro frente a él, su líder. Para el estado estacionario $\delta \equiv \frac{1}{D}$, que es equivalente a las funciones $S(D)$, y $S(\delta)$ es fácilmente estabilizable. Los usuarios asumen $S(\delta)$ y eligen la velocidad de transición en las fases con un modelo dinámico continuo-tiempo-continuo-lugar de congestión de tráfico en el camino, que es equivalente al modelo estático estándar (Verhoef, 2003) pero es un modelo equilibrio dinámico en máxima congestión. En un modelo de una sola línea para el carro seguidor se tiene:

$$S_i \equiv \dot{x}_i = S(\delta_i) \equiv S(x_{i-1} - x_i)$$

Si S_i es igual a cero se tiene una distancia mínima δ_{\min} . Esta ecuación asume el control del conductor, con lo que si el seguidor conduce lento la distancia respecto al líder se incrementa, y viceversa. En caso de que el líder deje de existir porque cumplió el recorrido se calcula la velocidad y localización de los conductores con respecto al camino de salida. Verhoef considera que la función de velocidad distancia es:

²⁵ Diferencia entre el tiempo en el que se quiere llega al destino y el tiempo en llegar.

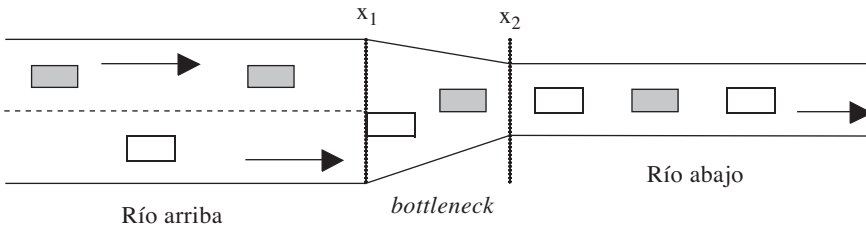
$$S(\delta) = \begin{cases} S(\delta) = 0 & \text{si } \delta \leq 5 \\ S(\delta) = 33 \frac{1}{3} - \frac{33 \frac{1}{3}}{(100-5)^5} (100-\delta)^5 & \text{si } 5 < \delta \leq 100 \\ S(\delta) = 33 \frac{1}{3} & \text{de otra manera} \end{cases}^{26}$$

Venhoerf (2001, 2003) muestra como para un camino con capacidad constante el equilibrio de la hipercongestión y la curva de costo medio se pueden derivar de una dinámica inestable.

En caso en de que un camino de dos vías se reduzca a una sola vía se tienen dos puntos x_1 y x_2 . Si el flujo de tráfico es lo suficientemente alto se origina un *embotellamiento* (véase Gráfica 5).

Gráfica 5

Esquema espacial de una red de camino y un embotellamiento



Fuente: Elaboración propia con base en Venhoerf (2001, 2003).

Antes de x_1 los conductores podrían elegir entre seguir o no, después de x_2 tienen un líder. El modelo queda definido por δ_i^t , la velocidad de un conductor en el momento t cuando el líder está presente:

$$\delta_i^t = \begin{cases} x_{i-2}^t - x_i^t & \text{si } x_{i-1}^t < x_1 \\ w(t)(x_{i-2}^t - x_i^t) + (1-w(t))(x_{i-1}^t - x_i^t) & \text{si } x_1 \leq x_{i-2}^t \leq x_2 \\ x_{i-1}^t - x_i^t & \text{si } x_{i-1}^t > x_2 \end{cases}$$

²⁶ Distancia mínima de 5 metros para velocidad de 0, la máxima velocidad es de $33 \frac{1}{3}$ m/s (120k/H) que se obtiene cuando $\delta \geq 100$ metros. En los valores intermedios hay una función polinomial arbitraria. Los flujos calculados son $F = \frac{S(\delta)}{\delta}$ el flujo máximo es $F_{\max} = 0.965$ Veh/s es consistente con una velocidad de $S^* = 17.551$ m/s ($= 63.18$ km/h) y una distancia entre los carros de $\delta^* = 18.195$ metros ($D^* = 0.055$ vehículos por metro) calculando el costo medio $\alpha X/S$, el segmento de a bajo de la curva corresponde a la hipercongestión.

$$\text{con } w(t) = 1 + 2 \cdot \left(\frac{t - t_{i-1,1}}{t_{i-1,2} - t_{i-1,1}} \right)^3 - 3 \cdot \left(\frac{t - t_{i-1,1}}{t_{i-1,2} - t_{i-1,1}} \right)^2$$

Donde: $w(t)$ es una función que asigna pesos a los distintos conductores $i-1$ y $i-2$, los cuales suman 1; y $t-1$ es el momento en que el conductor $i-1$ pasa por el punto x_1 y así para x_2 .

En este modelo el precio de viaje de equilibrio debe ser el mismo para todos los usuarios. Al igual que en el modelo de *bottleneck* no existe un equilibrio de Nash determinístico dinámico, ya que el tiempo de salida de un conductor $i+1$ lo ajusta al tiempo de salida de i , por lo cual se tiene un equilibrio cerrado con usuarios en tiempo discreto.

Este modelo es diferente al modelo de embotellamiento puro en que: 1) las colas no son verticales y mínimamente espaciales y el comportamiento en la cola es modelado explícitamente; 2) una cola afecta el tráfico río arriba, los conductores bajan la velocidad conforme se acercan a la cola; y 3) la falta irrealista de que en los modelos de embotellamiento se puede elegir la velocidad como una variable dependiendo de la situación de tráfico.

Conclusiones

El análisis de la hipercongestión se ha venido desarrollando como respuesta a la insuficiencia que muestra la teoría para explicar la complejidad del problema. Sin embargo, es un tema al cual no se ha llegado a un consenso y en el que la discusión se terminará. Los avances en los modelos y estudios son muchos.

Aquí se trataron diversos modelos que han surgido como respuesta a insuficiencias o incapacidades que tienen para dar respuesta a la modelación. Es más sencillo modelar un área bien definida, y un camino prometedor son los modelos de planificación endógenos.

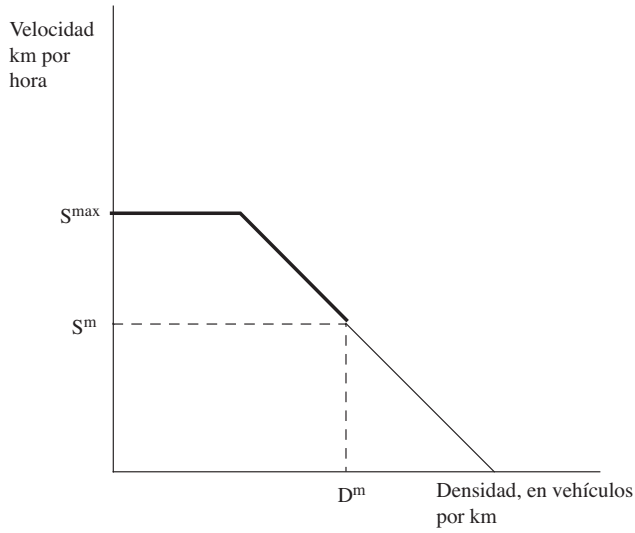
Los futuros estudios que se realicen en esta materia seguramente serán sobre el fenómeno de equilibrio dinámico, en el que se concluye que no hay un verdadero óptimo que pueda acercarse a él. Sin embargo, la utilidad de los modelos dinámicos dependerá de las particularidades de cada región de estudio.

Bibliografía

- Ardekani, S. A. y R. Herman (1987). "Urban Network-Wide Variables and Their Relations", *Transportation Science*, 21, pp. 1.
- Arnott, R. (1990). "Signalized Intersection Queuing Theory and Central Business District Auto Congestion", *Economics Letter*, 33, pp. 197-201.
- Arnott, R., A. de Palma y R. Lindsey (1998). "Recent developments in the bottleneck model", Button and Verhoef (eds.), *Road Pricing, Traffic Congestion, and the Environment*, Edward Elgar, pp. 79-110.
- Boardman, A y B. Lave (1977). "Highway congestion and congestion tolls", 4, pp. 340-359.
- Haight F., (1963). *Mathematical Theories of Traffic Flow*, New York: Academic Press.
- Hau, T.D. (1998). "Congestion pricing and road investment", Button and Vehoef (eds.), *Road Pricing, Traffic Congestion, and the Environment*, Edward Elgar, pp. 39-78.
- Keeler, T. y K. Small (1977). "Optimal Peak-Load Pricing, Investment, and Service Levels on Urban Expressways", *Journal of Political Economy*, 85, 1, pp. 1-25.
- Lindsay, R. y E. Verhoef (2000). "Congestion modeling", Hensher y Button (eds.), *Handbook of Transport Modelling*, Elsevier Science, Ltd.
- McDonald, J., E. D'Ouville y L. Liu (1999). *Economics of Urban Highway Congestion and Pricing*, Kluwer Academic Publishers.
- Payne, T. (1984). "Locational relations in Yagua narrative", *Work Papers of the Summer Institute of Linguistics*, University of North Dakota 28, pp. 157-92.
- Small, K. (1992), *Urban Transportation Economics*, Harwood Academic Publishers, pp. 58-104.
- Small, K. y X. Chu (2003). "Hypercongestion", *Journal of Transport Economics and Policy*, 37, pp. 319-352.
- Verhoef, E. (1999). "Time, speeds, flows and densities in static models of road traffic congestion and congestion pricing", *Regional Science and Urban Economics*, 29, pp. 341-369.
- Walters, A. (1961). "The Theory and Measurement of Private and Social Cost of Highway Congestion", *Econometrica*, 29, 4, pp. 676-699.

Apéndice

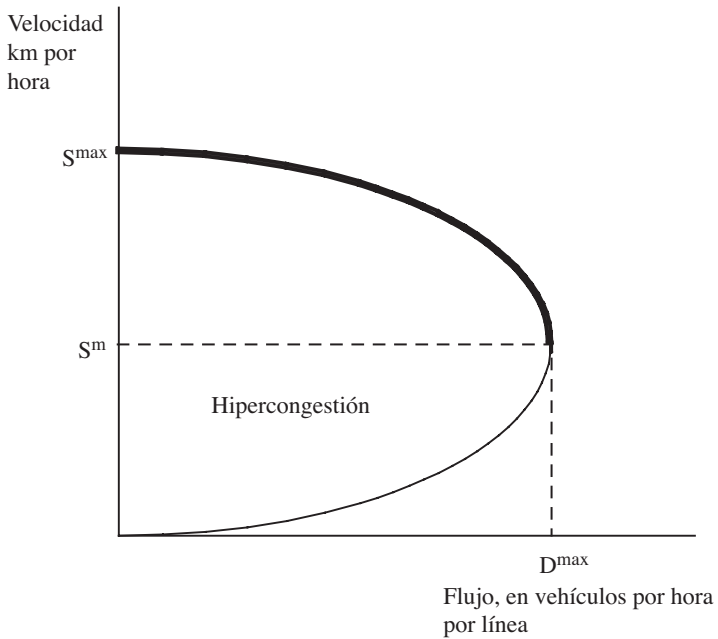
Gráfica A.1
Curva de viaje tiempo-flujo en un área urbana



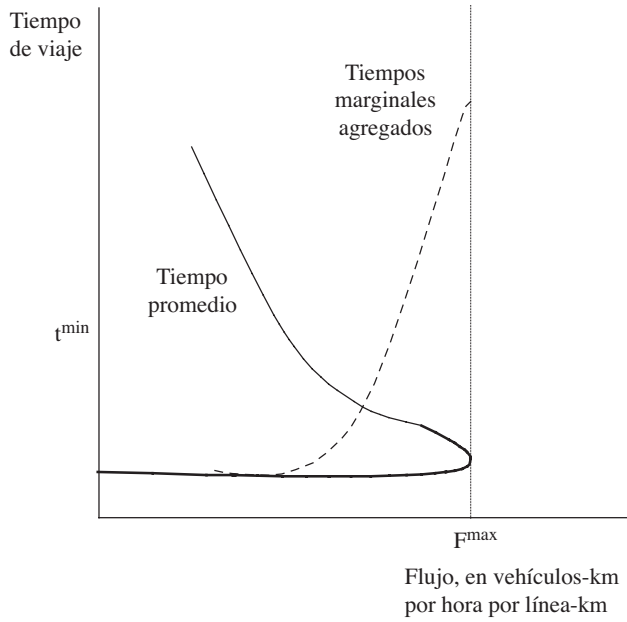
78

Fuente: Hau (1998).

Gráfica A.2



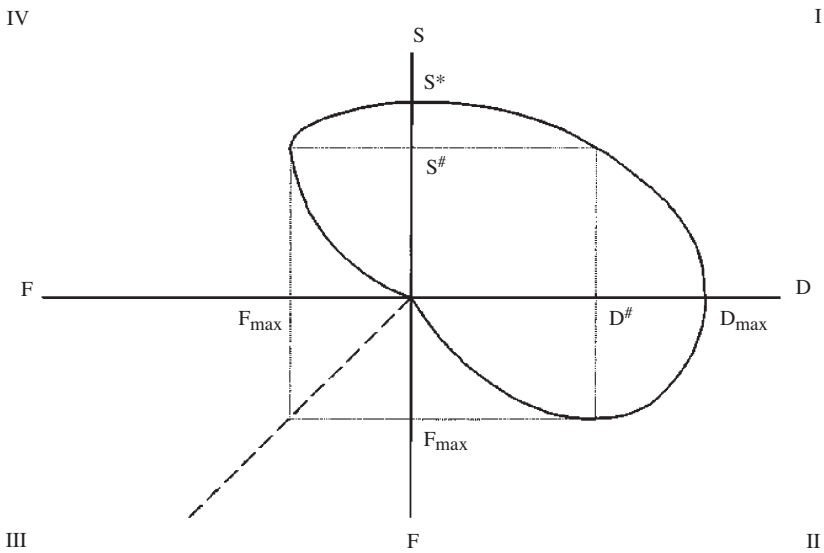
Gráfica A.3



Fuente: Hau (1998).

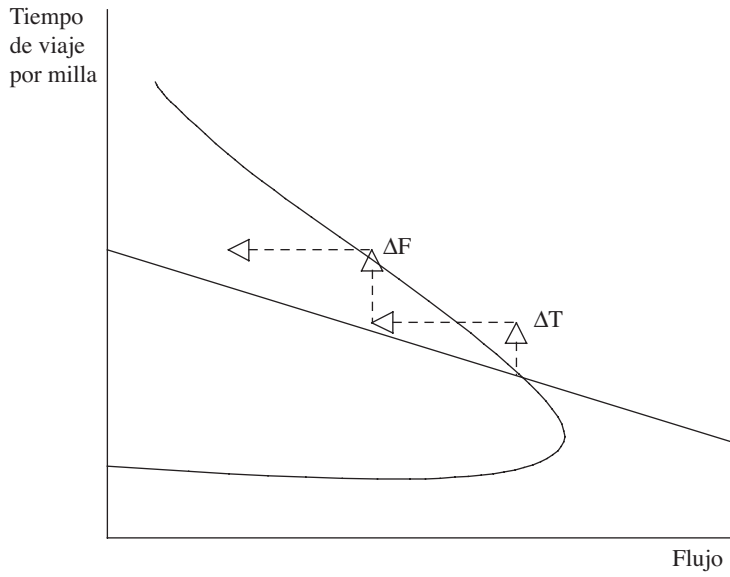
Gráfica A.4

Curva densidad-velocidad (I), curva velocidad-flujo (IV) y curva densidad-flujo (II)



Fuente: Verhoef (1999).

Gráfica A.5
Tiempo de viaje y flujo



80



Fuente: Small y Chu (2003).